一般項が $a_n = \left(3+2\sqrt{2}\right)^n + \left(3-2\sqrt{2}\right)^n$ である数列 $\{a_n\}$ $(n=0\,,\,1\,,\,2\,,\,\cdots)$ について答えよ．

(1)　$a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n$ $(n=0\,,\,1\,,\,2\,,\,\cdots)$ が成り立つことを示せ．また，$a_0\,,\,a_1$ を求めよ．

(2)　(1) より，数列 $\{a_n\}$ の各項は整数であることがわかる．a_n を 7 で割った余り $f(n)$ を求めよ．

---

(1)

$a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n \quad \cdots$ ① を示す．

$\alpha = 3+2\sqrt{2}$, $\beta = 3-2\sqrt{2}$ とおくと

①の左辺 − 右辺

$$= \left(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}\right) - 6\left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right) + \left(\alpha^n+\beta^n\right)$$

$$= \left(\alpha^2-6\alpha+1\right)\alpha^n + \left(\beta^2-6\beta+1\right)\beta^n. \quad \cdots ②$$

ここで，$\alpha = 3+2\sqrt{2}$ より

$(\alpha-3)^2 = 8.\ \therefore\ \alpha^2-6\alpha+1=0.$

同様に，$\beta^2-6\beta+1=0.$

これらと②より，①の左辺 − 右辺 $=0$．つまり，① が示せた．□

(2)

$$\begin{cases} a_1 = 1+1 = 2\,, \\ a_2 = \alpha+\beta = 6. \end{cases} \quad \cdots ③$$

〈らくがき〉

n	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
a_n	2	6	34	198			
$f(n)$	2	6	6	2	6	6	

$2\cdot 6 - 6 = 6$ より ⟶ ↑

(3 は $f(n)$ の周期っぽい？そこで $\cdots$)

$a_{n+3} \equiv a_n \pmod 7 \quad \cdots$ ④

を示す．

$$\begin{aligned} a_{n+3} &= 6a_{n+2} - a_{n+1} \\ &= 6\left(6a_{n+1}-a_n\right) - a_{n+1} \\ &= 35a_{n+1} - 6a_n. \\ \therefore\ a_{n+3} - a_n &= 7\cdot \underbrace{\left(5a_{n+1}-a_n\right)}_{\text{整数}}. \end{aligned}$$

よって，$7 \mid a_{n+3}-a_n$, i.e. ④ が示せた．

$\therefore\ f(n+3) = f(n). \quad \cdots ④'$

また，③より $f(0)=2$, $f(1)=6$.

$a_2 = 6\cdot 6 - 2 = 34$ より $f(2) = 6$.

これらと ④′ より，帰納的に

$$f(n) = \begin{cases} 2\ (n=0\,,\,3\,,\,6\,,\,9\,,\,\cdots)\,, \\ 6\ (n=1\,,\,4\,,\,7\,,\,10\,,\,\cdots)\,, \\ 6\ (n=2\,,\,5\,,\,8\,,\,11\,,\,\cdots). \end{cases} //$$