$\boxed{\text{添削 1-2}}$ **【問題】**(50 点)

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき

$$S_n + na_n = 3n^2 + n + 20\ (n = 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ \cdots)$$

が成り立ってる．

(1) $n = 2\,,\ 3\,,\ 4\,,\ \cdots$ のとき，a_n と a_{n-1} の間に成り立つ関係式を求めよ．

(2) $b_n = n(n+1)a_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) a_n の値が整数となるような n の値と，そのときの a_n の値を求めよ．

【解答】 (1)

$$S_n + na_n = 3n^2 + n + 20\ (n \geq 1).\ \cdots ①$$

①の n を $n-1$ に変えると

$$\begin{aligned} &S_{n-1} + (n-1)a_{n-1} \\ =&3(n-1)^2 + (n-1) + 20\ (n \geq 2).\ \cdots ② \end{aligned}$$

①−②より

$$\begin{aligned} a_n + na_n - (n-1)a_{n-1} =&3(2n-1) + 1. \\ (n+1)a_n - (n-1)a_{n-1} =&6n - 2\ (n \geq 2). \end{aligned}$$

$$\cdots ③$$

(2) ①で $n = 1$ として

$$a_1 + a_1 =3 + 1 + 20. \therefore\ \ a_1 = 12.\ \cdots ④$$

③の両辺を n 倍して

$$\begin{aligned} (n+1)na_n - n(n-1)a_{n-1} =&6n^2 - 2n. \\ \text{i.e.}\ \ b_n - b_{n-1} =&6n^2 - 2n. \end{aligned}$$

また，④より $b_1 = 24$. よって，$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n =&b_1 + \sum_{k=2}^{n}\left(6k^2 - 2k\right) \\ =&24 - 4 + \sum_{k=1}^{n}\left(6k^2 - 2k\right) \\ =&20 + n(n+1)(2n+1) - n(n+1) \\ =&2n^3 + 2n^2 + 20. \end{aligned}$$

(これは $n = 1$ でも成立)

(3) (2) より，

$$\begin{aligned} a_n =&\frac{b_n}{n(n+1)} \\ =&\frac{2n^3 + 2n^2 + 20}{n^2 + n} = 2n + \frac{20}{n^2 + n}.\ \cdots ⑤ \end{aligned}$$

a_n が整数のとき，$\dfrac{20}{n^2+n}(> 0)$ は自然数だから

$$\frac{20}{n^2 + n} \geq 1.$$

$$\therefore\ n(n+1) \leq 20.$$

よって，$n = 1\,, 2\,, 3\,, 4$ が必要であり，次表を得る．

n	1	2	3	4
$n(n+1)$	2	6	12	20
$\dfrac{20}{n(n+1)}$	10	×	×	1

(「×」は整数でない値)

以上より，求めるものは

$$(n\,,\ a_n) = (1\,,\ 12)\,,\ (4\,,\ 9).$$

〔⑤以降の別解〕

$$n(n+1)\cdot(a_n - 2n) = 20.$$

よって，$a_n \in \mathbb{Z}$ であるとき，$n(n+1)$ は 20 の約数である．

$$n(n+1) = 2\,,\ 6\,,\ 12\,,\ 20\,,\ \cdots$$

の中でこれを満たすものは

$$n(n+1) = 2\,,\ 20. \quad \text{i.e.}\ \ n = 1\,,\ 4.$$

… 以下略 …